مربع‌های لاتین

محمود نصیری

اشاره

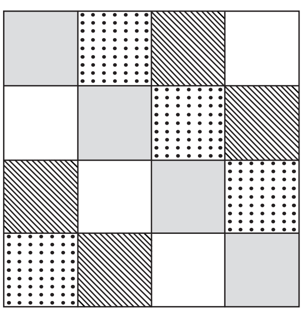
مبحـث مربع‌های لاتین یکی از بخش‌های جدید در ریاضیات گسســته پایه دوازدهم رشــته ریاضی فیزیک است. در این مقاله که از دو قسمت تشکیل شده است، در قسمت اول سعی می‌کنیم مفهوم‌های اساسی در مورد مربع‌های لاتین و کاربردهایی از آن را بیان کنیم. ســپس مربع‌های لاتین متعامد و روش‌های ســاختن آن‌ها را همراه با کاربرد آن بررسی می‌کنیم، سعی شده است علاوه بر روش کتاب درسی روش‌های دیگری نیز بیان شوند. همچنین به مسئله‌های کتاب نیز اشاره‌ای شده است. در قسمت دوم کاربردی از مربع‌های لاتین را در مورد ساختن مربع‌های جادویی بیان می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مربع‌های لاتین، اویلر، جدول کیلی، مربع‌های لاتین متعامد

در مربع ۴ × ۴ شــکل ۱، ســعی کرده‌ایــم از چهار نوع نماد رنگ‌آمیزی یا ســایه استفاده کنیم، به‌طوری که هیچ دو مربعی در یک ســطر و هیچ دو مربعی در یک ستون، رنگ یا ســایهٔ یکسان ندارند. چنین مربع‌هایی را «مربع‌های لاتین»[1] می‌نامند.

توســعهٔ منظم مربع‌های لاتین به‌وســیلهٔ **اویلر** در سال ۱۷۷۹ شــروع شــد و توسـط **کیلی** (۱۸۹۰ ـ ۱۸۷۷) در مورد جــدول عمل روی گروه‌ها به‌کار برده شــد. چون اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین اســتفاده می‌کرد، به همیــن دلیل این مربع‌ها به نــام مربع‌های لاتین معروف شدند. در ســال ۱۹۳۰، مفهوم آن یک‌بار دیگر وقتی تئوری «شــبه گروه‌ها»[2] مطرح شد به کار برده شد. مربع‌های لاتین در مبانی هندسه‌های متناهی نیز نقش مهمی را ایفا می‌کنند؛ موضوعی که هم‌اکنون نیز در حال توسعه است. همچنین در سال ۱۹۳۰ بزرگ‌ترین زمینهٔ کاربرد مربع‌های لاتین توسط **فیشر**[3] مطرح شد که آن‌ها را در دیگر ساختارهای ترکیبیاتی در طرح آزمایش‌های آماری بــه کار برد. به‌طور کلی مبحث مربع‌هــای لاتین، جدا از بحث ترکیبیــات، به نام «طرح‌های ترکیبیاتی»[4] معروف است.

ســاده‌ترین و کاربردی‌ترین نمایش ایــن مربع‌ها به این صورت است که به جای حرف‌ها یا نمادهای دیگر از عددهای طبیعی یا عددهای صحیح نامنفی استفاده کنیم.



تعریف: یک مربع لاتین از مرتبهٔ n روی یک مجموعهٔ x از n شی یا نماد، یک آرایهٔ n×n شامل n سطر و n ستون است، به‌طوری که هر شــی یا نماد فقط یک بار در هر سطر و فقط یک بار در هر ستون واقع شده باشد. یعنی هر شی یا هر نماد در هیچ سطر و هیچ ستون آن تکرار نشده باشد.

یــک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ به‌صورت شــکل ۳ اســت.

مشاهده می‌کنید که در هر سطر و در هر ستون هیچ دو عدد مساوی وجود ندارد.

بنابراین،

شکل ۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

در یـــک مربع لاتین L که روی یـــک مجموعهٔ X تعریف می‌شود، هر خانه یا درایه، شامل عضوی از X است، به‌طوری که هر سطر L یک جایگشت از X و هر ستون L نیز یک جایگشت از X است.

چنین مربع‌های لاتینی را چرخشی یا دوری نیز می‌نامند. در شـــکل ۳ یک مربع لاتین n×n چرخشی را روی مجموعهٔ، X={۱ ,۲,۳ ,... ,n −۱ ,n} مشـــاهده می‌کنید. در سطر اول تمام اعضای X، یعنی n, ...,۲, ۱ نوشـــته شـــده‌اند. سپس با تبدیل دوری عددها به‌صورت زیر در ســـایر ســـطرها نوشته شده‌اند:

$$۱ \rightarrow n \rightarrow n-۱ \rightarrow n-۲ \rightarrow \circ\circ\circ \rightarrow ۳ \rightarrow ۲ \rightarrow ۱$$

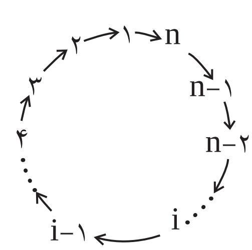
شکل ۳

۱	۲	۳	...	n-۱	n
n	۱	۲	...	n-۲	n-۱
n-۱	n	۱	...	n-۳	n-۲
:	.	.	...	.	.
:	.	.	...	.	.
۳	۴	۵	...	۱	۲
۲	۳	۴	...	n	۱

می‌توانیم این‌گونه نیز مطرح کنیم که از ســـمت چپ، هر خانه به اندازهٔ n −۱ خانه به سمت راست انتقال یافته است.

فعالیت: اگر داشته باشیم: X={۱ ,۲,۳ , ... ,n}، یک مربع لاتین چرخشی n×n، با تبدیل دوری زیر بنویسید.

$$۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴ \rightarrow \circ\circ\circ \rightarrow n-۲ \rightarrow n-۱ \rightarrow n \rightarrow ۱$$



شکل ۴

۱	۲	۳	...	n-۱	n
۲	۳	۴	...	n	۱
۳	۴	۵	...	۱	۲
:	...	...	...	...	...
:	...	...	...	...	...
n	۱	۲	...	n-۲	n-۱

مربع لاتین کاهش یافته[۵]

اگر مربع لاتین خواسته شده در فعالیت قبل را بنویسید، به مربع لاتین شـــکل ۴ می‌رسید. در این مربع لاتین نمادها یا عددهای ســـطر اول و ستون اول یکی هستند. چنین مربع لاتینی را «کاهش یافته» یا «فرم استاندارد» می‌نامند.

تعریف: یک مربع لاتین n×n یـــا از مرتبهٔ n را کاهش یافته (یا فرم استاندارد) می‌نامند، هرگاه، نمادهای سطر اول و همچنین ستون اول به ترتیب عددهای صحیح n −۱ ,∘∘∘ , ۲, ۱, ۰ یا عددهای طبیعی n, ... , ۲,۳, ۱ باشند.

یـــک مربع لاتین کاهش یافته از مرتبهٔ ۴ را در شـــکل ۷ مشاهده می‌کنید.

قضیه: به ازای هر عـــدد صحیح و مثبت n، همواره یک مربع لاتین کاهش یافته از مرتبهٔ n وجود دارد.

شکل ۵

۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲

عددهای صحیح n −۱ ,∘∘∘ ,۲ ,۱ ,۰ را در اولین ســـطر جدول n×n در نظر می‌گیریم. بقیهٔ ســـطرها با تبدیل دوری عددها به یکدیگر به دســـت می‌آیند. برای ساختن سطر iام، یک انتقال دوری از اولین ســـطر انجام می‌دهیم، به‌طوری که موقعیـــت عددهای صحیح i −۱ را به چپ حرکت می‌دهیم. با انجام این عمل سطر iام به‌صورت زیر به دست می‌آید؛

$$i-۱, i, \circ\circ\circ, n-۱, ۰, ۱, \circ\circ\circ, i-۲$$

مثلاً سطر دوم با انتقال دوری سطر اول یک واحد به چپ بدست می‌آید. پس سطر دوم به‌صورت زیر است:

۱ ,۲,۳ ,... ,n −۱ ,۰

در واقـــع i را مســـاوی ۲ اختیار کرده‌ایم. بـــا این روش ســـاختن، در هر سطر n نماد متمایز وجود دارد و این نمادها هر کدام دقیقاً یک بار در هر سطر رخ می‌دهند. همین ترتیب برای هر ســـتون نیز برقرار است. مشاهده می‌کنیم که اولین سطر و اولین ستون دارای مجموعه نمادهای یکسان از عددها هســـتند. بنابراین یک مربع لاتین کاهـــش یافته از مرتبهٔ n ساخته‌ایم.

در شـــکل۶ یک نوع مربع لاتین کاهش یافته را مشاهده می‌کنید که البته چرخشی نیز هست.

یک مربع لاتین کاهش یافته یا غیرکاهش یافته از مرتبهٔ یک وجود دارد.

شکل ۶

L=	۰	۱	۲	...	n-۲	n-۱
	۱	۲	۳	...	n-۱	۰
	۲	۳	۴	...	۰	۱
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	n-۲	n-۱	۰	...	n-۴	n-۳
	n-۱	۰	۱	...	n-۳	n-۲

فقط یک مربع لاتین کاهش یافته ۲ × ۲ وجود دارد:

A	B
B	A

یا

۱	۲
۲	۱

نتیجه: فقط دو مربع لاتیـــن از مرتبهٔ ۲ یا ۲ × ۲ وجود دارد، چرا؟

مربع لاتین ۲ × ۲ کاهش یافته نمی‌باشد.

۲	۱
۱	۲

مربع لاتین ۲ × ۲ کاهش یافته

۱	۲
۲	۱

فعالیت: فکر می‌کنید چه تعداد مربع لاتین کاهش یافتهٔ ۳×۳ وجـــود دارد؟ در کل چه تعـــداد مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد؟

مطابق شـــکل ۷، سطر اول و ســـتون اول را می‌نویسیم. فکر می‌کنید $a_{۲۲}$ چه حرفی می‌تواند باشـــد؟ واضح است که B نمی‌تواند باشـــد. یا باید A باشد یا C. اما A نیز نمی‌تواند باشد، چرا؟

شکل ۷

A	B	C
B		
C		

اگـــر: $a_{۲۲} = A$، آن‌گاه بایـــد: $a_{۲۳} = C$ که بـــه تناقض می‌رسیم. پس: $a_{۲۲} = C$ در این صورت به‌طور مشخص سه درایهٔ دیگر به‌طور یکتا معلوم می‌شوند. (شکل ۸ و ۹)

شکل ۸

A	B	C
B	C	A
C	A	B

شکل ۹

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

بنابراین فقط یک مربع لاتیـــن کاهش یافته ۳×۳ وجود دارد. ســـعی کنید با نمادهای عددی آن را قبل از مشـــاهدهٔ شکل۹ بنویسید.

آیا اکنون می‌توانید تعـــداد مربع‌های لاتین کاهش یافته ۴ × ۴ را مشخص کنید؟

تعداد آن‌ها چهار تاست. در ادامه آن‌ها را آورده‌ایم.

وقتی تعداد ســـطرها و ستون‌ها بیشـــتر می‌شود، به طور بی‌سابقه‌ای تعداد مربع‌های لاتین افزایش می‌یابد.

اگر بتوانیم تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته یا استاندارد n×n را محاسبه کنیم، آن‌گاه به کمک رابطهٔ $|L_n|n!(n-۱)!$ و نیز رایانه می‌توانیم تعداد کل مربع‌های لاتین از مرتبهٔ n×n یعنی $|L'_n|$ را محاســـبه کنیم که $|L_n|$ تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافتهٔ n×n است.

در جـــدول ۱ تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته و تعداد کل مربع‌هـــای لاتین برای n=۱ تا n = ۸ آمده اســـت. تعداد این مربع‌ها تا n = ۱۱ محاســـبه شـــده و برای $n \geq ۱۲$ هنوز ناشناخته است.

مثلاً:

جدول ۱. تعداد مربع‌های لاتین

n	تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته	تعداد کل مربع‌های لاتین
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۱	۱۲
۴	۴	۵۷۶
۵	۵۶	۱۶۱۲۸۰
۶	۹۴۰۸	۸۱۲۸۵۱۲۰۰
۷	۱۶۹۴۲۰۸۰	۶۱۴۷۹۴۱۹۹۰۴۰۰۰
۸	۵۳۵۲۸۱۴۰۱۸۵۶	۱۰۸۷۷۶۰۳۲۴۵۹۰۸۲۹۵۶۸۰۰

$$n = ۴ \Rightarrow |L'_n| = ۴ \times (۴!)(۴-۱)! = ۴ \times ۴! \times ۳! = ۵۷۶$$

۱. چه تعداد مربع لاتیـــن کاهش یافتهٔ ۴×۴ وجود دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

سعی کنید طریقه‌ای برای نوشتن آن‌ها مشخص کنید.

!۴ طریق برای جایگشـــت عناصر ســـطر اول و سپس!۳ طریـــق برای بقیهٔ ســـه ســـطر وجـــود دارد. بنابراین در کل $۵۷۶ = ۳! \times ۴! \times ۴$ مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ وجود دارد. به همین روش می‌توان با داشـــتن تعداد مربع‌های لاتین اســـتاندارد از مرتبـــهٔ n، تعداد کل مربع‌های لاتیـــن ازمرتبهٔ n را پیدا کرد. $n!(n-۱)!$ را در تعداد مربع‌های لاتین استاندارد از مرتبهٔ n ضرب می‌کنیم که برابر می‌شود با: $|L_n|n!(n-۱)!$.

شکل ۱۰ (۴) یک حالت

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

یا

شکل ۱۰ (۴) و (۳) دو حالت

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴		
۴	۳		

شکل ۱۰ (۱) یک حالت

۱	۲	۳	۴
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۲	۱

یک حالت

سه حالت

شکل ۲۲

۱	۲	۳	۴
۲			
۳			
۴			

۲. تعداد مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۳ را مشخص کنید. (شکل ۱۰)

پاسخ: نشـــان دادیم که تعداد مربع‌های لاتین استاندارد مرتبهٔ ۳، یعنی I_3 فقط یکی است. پس:

$$\left|L_n\right| = 3!\times 2!\times 1 = 12$$

فــرض کنیم: $s = \{1,2,3\}$، در این صورت ۱۲ مربع لاتین روی S تعریف می‌شـــوند که به‌صورت زیرانـد. L_1 مربع لاتین استاندارد از مرتبهٔ سوم است که آن را با I_3 نیز نشان می‌دهیم. بقیهٔ این مربع‌ها از روی I_3 ساخته می‌شوند.

عملیات روی مربع‌های لاتین

ســه نوع عملیات می‌توانیم روی مربع‌هــای لاتین انجام دهیم، به‌طوری که مربع لاتین بودن آن‌ها حفظ شــود. یعنی با انجام این عملیات روی هر مربع لاتین، مربع لاتین دیگری به دست می‌آید.

۱. جایگشت ستون[۶]

۲. جایگشت سطر[۷]

۳. جایگشت نمادها[۸]، یعنی نام‌گذاری مجدد نمادها بدون آنکه موقعیت آن‌ها نسبت به هم تغییر کند.

اگــر بتوانیم با هر یک از عمل‌هــای فوق یک مربع لاتین را به مربع لاتین دیگری تبدیل کنیم، می‌گوییم این دو مربع لاتین «ایزوتوپیک[۹]» یا معادل هستند.

واضح است که چون در یک مربع لاتین هیچ عضو تکراری در هر ســطر و هر ستون وجود ندارد، پس با انجام اعمال یک جایگشت روی آن، مربع لاتین دیگری به‌دست می‌آید.

نتیجه: هر مربع لاتین را که به‌صورت استاندارد یا کاهش یافته نباشد، با انجام عملیات فوق می‌توان به‌صورت استاندارد تبدیل کرد.

بنابراین هر مربع لاتین معادل یک مربع لاتین استاندارد است. هر سه عمل فوق را در مثال‌های بعدی مشاهده می‌کنید.

شکل ۱۱

۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲

تعویض دو ستون

شکل ۱۱

۰	۱	۳	۲
۱	۲	۰	۳
۲	۳	۱	۰
۳	۰	۲	۱

۱. مربع لاتین ســـمت راست با تعویض دو ستون از مربع لاتین ســـمت چپ به دست آمده اســـت: جایگشت ستونی. (شکل ۱۱)

شکل ۳۶

۰	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۰
۱	۲	۰	۳
۳	۰	۲	۱

تعویض دو سطر

شکل ۳۷

۲	۰	۱	۳
۳	۱	۲	۰
۰	۲	۳	۱
۱	۳	۰	۲

۲. مربع لاتین ســـمت راست با تعویض دو سطر از جدول مربع لاتین سمت چپ به دست آمده است: جایگشت سطری.

۳. مربع لاتین ســـمت راست با جایگزینی عددهای ۲، ۰، ۱ و ۳ به ترتیب به عددهای ۰، ۱، ۲ و ۳ از مربع لاتین سمت راست به دست آمده است: جایگشت نمادها یا بر چسب‌گذاری مجدد.

شکل ۳۶

۰	۱	۳	۲
۱	۲	۰	۳
۲	۳	۱	۰
۳	۰	۲	۱

$۲ \longrightarrow ۰$

$۰ \longrightarrow ۱$

$۱ \longrightarrow ۲$

$۳ \longrightarrow ۳$

۷

شکل ۳۷

۰	۱	۲	۳
۳	۲	۰	۱
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۱	۰

جدول کیلی و مربع‌های لاتین

نمونــه‌ای از جدول کیلی را در «تقارن» که نمایشـــی از مربع‌های لاتین دارد، بررسی می‌کنیم.

یک تبدیل طولپای T یک تقارن شـــکل F است، هر گاه تبدیل یافتهٔ F خود F باشـــد؛ یعنـــی: $T(F) = F$. اگر تحت یک بازتاب تبدیل یافتهٔ یک شـــکل بر خودش منطبق شود، آن را «تقـــارن خطـــی» می‌نامنـــد. اگر تحت یـــک دوران با زاویهٔ α که $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$ شـــکل بر خودش منطبق شـــود، آن دوران را «تقـــارن دورانی» یا دوری شـــکل می‌نامند. مثلاً مســـتطیل دو تقارن خطی دارد که هر کدام از وسطهای دو ضلع مقابـــل می‌گذرند. به‌علاوه دو تقارن دورانی دارد: یکی با اندازهٔ زاویـــهٔ 180° و دیگری با زاویهٔ دوران 360° که در هر دو، مرکز دوران مرکز مســـتطیل است. اگر تقارن‌های خطی مستطیل را به H و V و تقارن دورانی 180° را به R و تقارن 360° را به I، که همان «تقارن همانی» است، نشان دهیم، در جدول شکل ۱۴ ترکیب این تقارن‌ها را تحت ترکیب تبدیلات

∘	I	R	H	V
I	I	R	H	V
R	R	I	V	H
H	H	V	I	R
V	V	H	R	I

شکل ۱۴

مشـــاهده می‌کنید که نمایش مشابه یک مربع لاتین کاهش یافته را دارد.

نمادها در سطرها و در ستون‌ها متمایزند.

مثلاً ترکیـــب دو دوران ۱۸۰°، یعنی RoR برابر دوران ۳۶۰°، یعنی I است. ترکیب دوران ۱۸۰° با بازتاب افقی بازتاب قائم است.

RoH=V

فعالیت: یک پاره‌خط چند تقارن خطی دارد؟ همچنین یک‌پاره‌خط چند تقارن دورانی دارد؟ سعی کنید ترکیبی از هر دو تقارن را مشـــخص کنید و جدول کیلی آن را بنویسید. آیا این جدول یک مربع لاتین است؟

مربع‌های لاتین در طرح‌های ترکیبیاتی

هر چند مربع‌های لاتین شـــامل اشـــیای ریاضی هستند، امـــا صورت‌های متفاوتی از آن‌ها در طراحی آزمایش‌ها به کار می‌روند. یک طرح آزمایشـــی شـــامل تخصیص پردازش روی واحد آزمایش است.

فرض کنیم می‌خواهیم پنج داروی A، B، C، D و E را برای کاهش نشانه‌های یک بیماری مزمن تست کنیم. پنج بیمار به مدت پنج هفته برای این آزمایش انتخاب شده‌اند. پنج بیمار را B_1، B_2، B_3، B_4 و B_5 می‌نامیم و پنج هفته را به ترتیب به W_1، W_2، W_3، W_4، W_5 نشـــان می‌دهیم. ساختار آن را در جدول شکل ۴۰ مشاهده می‌کنید که با یک مربع لاتین نشان داده شده است. هر بیمار در هر هفته فقط یک نوع دارو را مصرف می‌کند، پس در پنج هفته پنج نوع داروی متفاوت را مصرف می‌کند. در هر ســـتون هیچ داروی تکراری وجود ندارد. به همین ترتیب هر هفته هر بیمار فقط یک نوع دارو را مصرف می‌کند. پس در هر هفته پنج نوع داروی متفاوت توسط پنج بیمار مصرف می‌شود. در هر سطر هیچ داروی تکراری وجود ندارد.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
W_1	A	B	C	D	E
W_2	B	A	D	E	C
W_3	C	E	A	B	D
W_4	D	C	E	A	B
W_5	E	D	B	C	A

روشی برای نوشتن مربع‌های لاتین به‌وسیلهٔ Z_n

از نظریهٔ اعداد، با باقی‌مانده‌های هر عدد صحیح بر عدد طبیعی n آشنایی داریم. باقی‌مانده‌های هر عدد صحیح و مثبت بر عدد صحیح و مثبت n یکی از عددهای ۰، ۱، ۲، ... یا n-۱ است. مثلاً باقی‌مانده‌های هر عدد صحیح و مثبت a بر ۳ یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ است. با استفاده از هم‌نهشتی داریم:

$a \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $a \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $a \overset{۳}{\equiv} ۲$

این عددها را به $Z_۳$ نشان می‌دهیم؛ یعنی: $Z_۳=\{۰,۱,۲\}$

به‌طور کلی: $Z_n=\{۰,۱,۲,\dots,n-۱\}$.

بنابراین، به‌طور عادی ســـطرها و ســـتون‌ها در مربع‌های لاتین می‌توانند روی Z_n با عضوهای Z_n نمادگذاری شـــوند. بـــه این منظور عددهای هر خانه یا هـــر درایه را به روش زیر مشخص می‌کنیم.

$L[i,j]=(i+j)\bmod(n)$ یا پیمانه $L[i,j]=(i+j)n$

بنابراین:

$L=\{(i,j,a_{(i+1)(j+1)}) \mid i=۰,۱,\dots,n-۱,\ j=۰,۱,\dots,n-۱\}$

در سطر iام و ستون jام درایهٔ $a_{(i+1)(j+1)}$ است که از $i+j$ (پیمانهٔ n) محاسبه می‌شود.

در مثال زیر نحوهٔ محاسبه درایه‌ها را مشاهده می‌کنید.

مثال: یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ بسازید.

پاسخ: $a_{(i+1)(j+1)} = i+j$ (پیمانه ۴)

مثـــلاً بـــرای محاســـبهٔ درایـــه یا عـــدد واقع در ســـطر سوم و ســـتون چهارم، یعنی $a_{۳۴}$، چنین عمـــل می‌کنیم: $a_{۳۴}=a_{(۲+۱)(۳+۱)}=۲+۳\equiv۵\equiv۱$ در جدول شکل ۱۶ محاسبهٔ هر کدام نشان داده شده است.

اگر سطر اول و ســـتون اول را با عددهای ۱، ۲، ...، n شـــروع کنیم. مربع لاتین چرخشـــی از مرتبهٔ n را داریم که

شکل ۱۶

	۰	۱	۲	۳
۰	$۰+۰\overset{۴}{\equiv}\boxed{۰}$	$۰+۱\overset{۴}{\equiv}\boxed{۱}$	$۰+۲\overset{۴}{\equiv}\boxed{۲}$	$۰+۳\overset{۴}{\equiv}\boxed{۳}$
۱	$۱+۰\overset{۴}{\equiv}\boxed{۱}$	$۱+۱\overset{۴}{\equiv}\boxed{۲}$	$۱+۲\overset{۴}{\equiv}\boxed{۳}$	$۱+۳\overset{۴}{\equiv}\boxed{۰}$
۲	$۲+۰\overset{۴}{\equiv}\boxed{۲}$	$۲+۱\overset{۴}{\equiv}\boxed{۳}$	$۲+۲\overset{۴}{\equiv}\boxed{۰}$	$۲+۳\overset{۴}{\equiv}\boxed{۱}$
۳	$۳+۰\overset{۴}{\equiv}\boxed{۳}$	$۳+۱\overset{۴}{\equiv}\boxed{۰}$	$۳+۲\overset{۴}{\equiv}\boxed{۱}$	$۳+۳\overset{۴}{\equiv}\boxed{۲}$

۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲

در شـــکل ۱۷ می‌بینید. در این صـــورت، $i+j-۱$ به پیمانه n محاسبه می‌شود.

شکل ۱۷

	۱	۲		n-۱	n
۱	۱	۲	...	n-۱	n
۲	۲	۳	...	n	۱
۳	۳	۴	...	۱	۲
$R_n=$	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
n-۱	n-۱	n	...	n-۳	n-۲
n	n	۱	...	n-۲	n-۱

$i+j-۱\bmod(n)$

مثلاً در $L_۳$، عدد واقع در ســـطر سوم و ستون سوم برابر است ($a_{۳۳}=۱$)، زیرا:

$$۳+۳-۱\overset{۴}{\equiv}۵\overset{۴}{\equiv}۱\Rightarrow a_{۳۳}=۱$$

در R_n که در فوق نشان داده شده است، عدد واقع در سطر n ام و ستون دوم برابر ۱ است، زیرا:

$$n+۲-۱\overset{n}{\equiv}n+۱\overset{n}{\equiv}۱\Rightarrow a_{n۲}=۱$$

مربع‌های لاتین متعامد[۱۰]

دو مربع لاتین از مرتبهٔ، ۳ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۸).

شکل ۱۸

A	B	C
C	A	B
B	C	A

شکل ۱۸

α	β	γ
β	γ	α
γ	α	β

شکل ۱۹

Aα	Bβ	Cγ
Cβ	Aγ	Bα
Bγ	Cα	Aβ

وقتی این دو مربع، چنان روی هم نهاده شوند که هر درایه اولی در کنار درایهٔ نظیرش از دومی واقع شـــود، به مربع شکل ۱۹ می‌رسیم.

مشاهده می‌کنیم که در این مربع هیچ دو درایه‌ای یکسان نیستند. یعنی هر دوبه‌دوی درایه‌ها متمایزند.

وقتی از برهم‌نهی دو مربع لاتین از مرتبهٔ n، چنین مربعی از مرتبهٔ n با این ویژگی به‌دست می‌آید که نمادهای هر $n^۲$ درایه یا خانه متمایزند، این دو مربع لاتین را «متعامد» می‌نامند.

گاهی این دو مربع لاتیـــن را مربع‌های «گریکولاتین»[۱۱] نیز می‌نامند. زیرا به‌طور ســـنتی، حروف لاتین برای مربع اول و حـــروف یونانی برای مربع دوم به کار رفته اســـت. به همین ترتیب اگر دو مربع لاتین شکل ۲۰ را که نمادهای آن‌ها عدد هســـتند در نظر بگیریم و این دو مربع را چنان روی هم قرار می‌دهیم که هر درایه از اولی در کنار درایهٔ متناظر آن از دومی واقع شود، در این صورت مربعی از همان مرتبهٔ ۳ به‌دست می آید که به صورت مربع سمت راست شکل ۴۵ است.

شکل ۲۰

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲
$L_۱$		

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱
$L_۲$		

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱
$L_۱L_۲$		

چـــون در مربع $S_{(L_۱,L_۲)}$، هر دوبـــه دوی درایه‌ها متمایز هستند، در نتیجه $L_۱$ و $L_۲$ را دو مربع لاتین متعامد می‌نامند. می‌توانیـــم $S_{(L_۱,L_۲)}$ را به‌صورت دقیق‌تر با زوج مرتب‌هایی از درایه‌های $L_۱$ و $L_۲$ نیز نشان دهیم (شکل ۲۱).

شکل ۲۱

$S(L_۱,L_۲)=$

(۱،۱)	(۲،۲)	(۳،۳)
(۲ ،۳)	(۳ ،۱)	(۱ ،۲)
(۳ ،۲)	(۱ ،۳)	(۲ ،۱)

بنابراین تعریف کلی‌تر زیر را داریم:

تعریف: دو مربع لاتین $n\times n$، $L_۱=[a_{ij}]$ و $L_۲=[b_{ij}]$، دو مربع لاتین متعامد نامیده می‌شـــوند، هـــر گاه، $n^۲$ زوج مرتب $(a_{ij}.b_{ij})$ دو به دو متمایز باشند. یعنی هر زوج مرتب از نمادها، دقیقاً یـــک بار در میان $n^۲$ زوج مرتب $(a_{ij}.b_{ij})$ رخ می‌دهد که: $j=۱,۲,\dots,n$ $i=۱,۲,\dots,n$.

دو مربع لاتین شکل ۲۲ متعامدند.

$L_۱=$

۰	۱	۲	۳
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰

$L_۲=$

۳	۰	۱	۲
۲	۱	۰	۳
۰	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۰

$S_{(L_۱,L_۲)}=$

(۰،۳)	(۱،۰)	(۲،۱)	(۳،۲)
(۱،۲)	(۰،۱)	(۳،۰)	(۲،۳)
(۲،۰)	(۳،۳)	(۰،۲)	(۱،۱)
(۳،۱)	(۲،۲)	(۱،۳)	(۰،۰)

دو مربع لاتین از مرتبهٔ n مفروض‌اند. فهرستی از $n^۲$ زوج مرتب شـــامل درایه‌هایی در همان موقعیت به ترتیب از مربع اول و مربع دوم را می‌نویسیم (این عمل را روی هم قرار دادن یا بر هم نهـــی دو مربع تلقی می‌کنیم). این دو مربع لاتین را متعامد می‌نامیم، هر گاه این فهرســـت شـــامل $n^۲$ زوج مرتب ممکن از n نماد هر کدام، دقیقاً یک بار رخ دهند.

وقتی $L_۱$ و $L_۲$ دو مربع لاتین متعامد باشند، گوییم $L_۱$ با $L_۲$ متعامد است یا $L_۲$ نیز با $L_۱$ متعامد است. بنابراین رابطهٔ تعامد در مربع‌های لاتین متقارن اســـت. یعنی اگر $L_۱$ با $L_۲$ متعامد

باشد، L_2 نیز با L_1 متعامد است. اگر L_1 یک مربع لاتین از مرتبهٔ n باشد که درایه‌هایش از مجموعهٔ X باشند و L_2 یک مربع لاتین از مرتبهٔ n باشد که درایه‌هایش از مجموعهٔ Y باشند، گوییم L_1 و L_2 مربع‌های لاتین متعامد هستند هر گاه به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$ یک درایه (خانه) یکتای (i,j) وجود داشته باشد، به‌طوری که: $L_1(i,j)=x$ و $L_2(i,j)=y$.

در واقع L_1 و L_2 را چنان روی هم می‌گذاریم که هر خانهٔ (i,j) توسط زوج مرتب $\big(L_1(i,j), L_2(i,j)\big)$ پر شود سپس، L_1 و L_2 را متعامد می‌نامیم. اگر و فقط اگر این انطباق یا روی هم‌گذاری شامل هر زوج مرتب از $X \times Y$ باشد.

در مثال قبلی هر ۱۶ زوج مرتب، $(i,j) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ در این کنار هم‌گذاری یا این نوع بر هم نهی رخ داده است.

در حالت کلی، ساختن مربع‌های لاتین متعامد ساده نیست.

مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ یک وجود دارند، زیرا در شرایط تعریف صدق می‌کنند، اما جذابیتی ندارند. به همین دلیل بعضی از کتاب‌ها $n>1$ در نظر می‌گیرند.

به سادگی می‌توان نشان داد که مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۲ وجود ندارند، زیرا فقط دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۲ وجود دارند که آن‌ها را در شکل ۲۳ مشاهده می‌کنید.

$S_{(L_1, L_2)}$ یک مربع لاتین است، اما L_1 و L_2 متعامد نیستند، چرا؟

در مثال‌های قبلی مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و ۴ را مشاهده کردید. می‌توان دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ را نوشت، اما دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارند.

شکل ۲۳

$$L_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} \qquad L_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad S_{(L_1, L_2)}=\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 21 \\ \hline 21 & 12 \\ \hline\end{array}$$

در حدود ۲۰۰ سال قبل، **اویلر** حدس زد که مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n اگر $n=4k+2$ وجود ندارند. این حدس برای $n=6$ توسط **تاری**[12] در سال ۱۹۹۰ ثابت شد، اما بقیهٔ حدس که برای هر $n>6$ است، رد شد. در سال‌های ۱۹۵۹ و ۱۹۶۰، **باس**، **پارکر** و **شری‌خانده**[13] ثابت کردند که به ازای هر $n>6$، مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارند.

روش‌هایی برای ساختن مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد $(n>1)$

دو مربع لاتین روی Z_n به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_1[i,j]=(i+j) \bmod n \text{ و } L_2[i,j]=(i-j) \bmod n$$

L_1 و L_2 دو مربع لاتین هستند. اگر n فرد باشد، متعامد نیز هستند. درایهٔ $a_{(i+1)(j+1)}$ در سطر iام و ستون jام است.

فرض کنیم: $(a,b) \in Z_n \times Z_n$. باید یک درایهٔ یکتای (i,j) پیدا کنیم، به‌طوری که:

$$L_1[i,j]=a \quad \text{و} \quad L_2[i,j]=b$$

در واقع دستگاه زیر باید برای i و j جواب یکتا داشته باشد:

$$i+j \overset{n}{\equiv} a,\ i-j \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow 2i \overset{n}{\equiv} a+b,\ 2j \overset{n}{\equiv} a-b$$

چون ۲ برای n های فرد، در Z_n دارای وارون است که برابر $\frac{n+1}{2}$ می‌شود، در نتیجه:

$$i \overset{n}{\equiv} \frac{n+1}{2}(a+b) \qquad j \overset{n}{\equiv} \frac{n+1}{2}(a-b)$$

بنابراین:

اگر $n>1$ فرد باشد، آن‌گاه مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارند.

در ادامه برای نمونه مطابق قاعدهٔ بیان شده، ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ را مشاهده می‌کنید. (شکل ۲۴)

شکل ۲۴

$$L_1=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \quad L_2=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \quad S_{(L_1, L_2)}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 00 & 14 & 23 & 32 & 41 \\ \hline 11 & 20 & 34 & 43 & 02 \\ \hline 22 & 31 & 40 & 04 & 13 \\ \hline 33 & 42 & 01 & 10 & 24 \\ \hline 44 & 03 & 12 & 21 & 30 \\ \hline\end{array}$$

به‌طور نمونه:

$$L_1=[a_{ij}]=a_{(i+1)(j+1)}=i+j \overset{5}{\equiv} ?$$

$$L_2=[b_{ij}]=b_{(i+1)(j+1)}=i-j \overset{5}{\equiv} ?$$

$$a_{34}=a_{(2+1)(3+1)}=2+3 \overset{5}{\equiv} 0$$

$$b_{34}=b_{(2+1)(3+1)}=2-3 \overset{5}{\equiv} -1 \overset{5}{\equiv} 4$$

$$a_{45}=a_{(3+1)(4+1)}=3+4 \overset{5}{\equiv} 2$$

$$b_{45}=b_{(3+1)(4+1)}=3-4 \overset{5}{\equiv} 4$$

ویژگی‌هایی از مربع‌های لاتین متعامد

۱. طبق تعریف مربع‌های لاتین از مرتبه یک وجود دارند، اما معمولاً $n>1$ اختیار می‌کنند.

۲. مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۲ وجود ندارند.

۳. مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳، ۴ و ۵ وجود دارند،

اما ثابت می‌شود مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارند.

۴. بـه ازای هر $n > ۶$ که n عددی طبیعی اسـت. ثابت می‌شـود دو مربع لاتین متعامد از مرتبـهٔ n وجود دارند. در مورد n فرد آن را ثابت کردیم.

معیاری برای متعامد نبودن دو مربع لاتین

اگر دو مربع لاتین

$L_۱\{(i,j,a_{ij})|i=۱,۲,...,n, j=۱,۲,...,n\}$ و

$L_۲\{(i,j,b_{ij})|i=۱,۲,...,n, j=۱,۲,...,n\}$

از مرتبه n داشـته باشـیم، به‌طوری که: $a_{ij}=a_{kr}=a$ و $b_{ij}=b_{kr}=b$ یعنی دو درایـه در مربع اول با هم دارای نمادهای یکسـان باشـند و در مربع دوم نیز همین دو درایه متناظر نیز دارای نمادهای یکسـان باشـند (لزومی ندارد با نمادهای مربع اول یکسـان باشـند)، در این صورت $L_۱$ و $L_۲$ متعامد نیستند. زیرا با روی هم قرار دادن $L_۱$ و $L_۲$ یا برهم نهی آن دو، یک درایه $S_{(L_۱,L_۲)}$ برابر $a_{ij}b_{ij}=ab$ و درایهٔ دیگری برابر $a_{kr}b_{kr}=ab$ است که نمادهای یکسانی دارند. پس $L_۱$ و $L_۲$ متعامد نخواهند بود. نمایشـی از آن را در دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ در شکل ۲۵ مشاهده می‌کنید.

در $S_{(L_۱,L_۲)}$ (شـکل ۲۵) روی هم‌گـذاری یـا «کنار هم گذاشتن[۱۴]» شکل ۲۵ دو مربع را مشاهده می‌کنید.

شکل ۲۵

$L_۱=$

	a		
			a

$L_۲=$

	b		
			b

$S_{(L_۱,L_۲)}=$

	ab		
			ab

نتیجه:

دو مربـع لاتیـن از مرتبـهٔ n. $L_۱=[a_{ij}]$ و $L_۲=[b_{ij}]$ متعامدند، هـر گاه به ازای هر $۰\le i,j,k,r\le n$ اگر: $a_{ij}=a_{kr}$، آن‌گاه: $b_{ij}\ne b_{kr}$.

مثال:

دو مربـع شـکل ۲۶ مفروض‌انـد و: $a_{۱۱}=a_{۲۲}=۱$ و $b_{۱۱}=b_{۲۲}=۳$. پس این دو مربع لاتین متعامد نیستند.

شکل ۲۶

$L_۲[b_{ij}]=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

شکل ۲۶

$L_۱[a_{ij}]=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

حال دو مربع لاتین شکل ۲۷ را در نظر می‌گیریم.

شکل ۲۷

$L_۱[a_{ij}]=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$L_۲[b_{ij}]=$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

بـه ازای هـر $۰\le r,k,j,i\le ۳$. اگـر: $a_{ij}=a_{kr}$، آن‌گاه: $b_{ij}\ne b_{kr}$. پس این دو مربع لاتین متعامدند.

جایگشت سطرها و ستون‌ها

اگر جای دو سطر (دو ستون) در یک مربع لاتین تعویض شـوند، مربع لاتین حاصل ممکن اسـت با مربع لاتین اصلی متعامد باشد یا نباشد.

مربـع لاتین $L_۲$ از مربع لاتین $L_۱$ با تعویض سـطرهای اول و سـوم به‌دست آمده است، مشاهده می‌کنیم که $L_۱$ و $L_۲$ متعامداند.

شکل ۲۸

$L_۱=$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$L_۲=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شکل ۲۹

$S_{(L_۱,L_۲)}=$

۱۳	۲۱	۳۲
۲۲	۳۳	۱۱
۳۱	۱۲	۲۳

$L_۱=$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

هر چند مربع‌های لاتین شامل اشیای ریاضی هستند، اما صورت‌های متفاوتی از آن‌ها در طراحی آزمایش‌ها به کار می‌روند. یک طرح آزمایشی شامل تخصیص پردازش روی واحد آزمایش است.

$L_۳=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$L_۲=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$L_۳=$

۰	۱	۲	۳
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲

$L_۲=$

۰	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱

$L_۱=$

۰	۱	۲	۳
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰

مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد[۱۵]

یـک مجموعـه مربع‌های لاتیـن دوبـه‌دو متعامد یک مجموعه‌ای از دو یا بیشـتر از مربع‌های لاتین هم‌مرتبه است، به‌طوری که هر کدام با دیگری متعامد باشد.

دو مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۲ و ۶ را بیان کردیم که وجود ندارند.

دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ وجود دارند.

در شـــکل ۵۹، آیا L_3 با L_1 یا با L_2 متعامد است؟ چرا؟ L_3 چگونه از L_1 به‌دست آمده است؟

سه مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۴ وجود دارند.

مربع لاتین کاهش یافته L_1 را در نظر می‌گیریم. ابتدا سطر چهارم را به ســـطر دوم و ســـطر دوم را به سطر سوم و سطر سوم را به سطر چهارم تبدیل می‌کنیم. مربع لاتین L_2 به‌دست می‌آید که با L_1 متعامد است.

$R_2 \to R_3 \to R_4 \to R_5$ یا $R_2 \to R_2 \to R_3 \to R_4$

به همین ترتیب، اگر در L_1، عمل‌های زیر را به‌طور متوالی انجام دهیم.

$$R_4 \to R_2 \to R_4 \to R_3$$

به مربع لاتین L_3 می‌رســـیم که بـــا L_1 و همچنین با L_2 متعامد است (شکل ۳۱).

شکل ۳۱

$S_{(L_1, L_2)} =$

۰۰	۱۱	۲۲	۳۳
۱۳	۰۲	۳۱	۲۰
۲۱	۳۰	۰۳	۱۲
۳۲	۲۳	۱۰	۰۱

شکل ۳۱

$S_{(L_1, L_3)} =$

۰۰	۱۱	۲۲	۳۳
۱۲	۰۳	۳۰	۲۱
۲۳	۳۲	۰۱	۱۰
۳۱	۲۰	۱۳	۰۲

شکل ۳۱

$S_{(L_2, L_3)} =$

۰۰	۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۲۳	۱۰	۰۱
۱۳	۰۲	۳۱	۲۰
۲۱	۳۰	۰۳	۱۲

چـــون L_1 و L_2 متعامدنـــد، همچنیـــن L_1 و L_3، L_2 و L_3 متعامدند، گوییم L_1 و L_2 و L_3 دو به دو متعامدند.

چهار مربع لاتین دوبـــه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۵ وجود دارند (شکل ۶۲).

و بالاخره حداکثر شش مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۷ وجود دارند. در حالت کلی قضیه زیر ثابت می‌شود:

۱. بـــه ازای هر $n \geq 2$، حداکثـــر $n-1$ مربع لاتین دوبه‌دو متعامد وجود دارند.

در ادامه مشاهده خواهید کرد که در همهٔ مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد می‌توانیم فرض کنیم سطر اول همه یکسان و مثلاً عددهای $1, 2, \ldots, n$ باشند.

وقتی تمام این عددها در ســـطر اول باشند، خانه یا درایهٔ a_{21} عدد ۱ نمی‌تواند باشد. پس حداکثر $n-1$ انتخاب برای آن وجود دارد.

۲. به ازای هر n طبیعی کـــه $n \neq 2, 6$، تعداد مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

۳. اگـــر $q-2$ توانی از یک عدد p باشـــد، یعنی $q = p^{\alpha}$، آن‌گاه تعـــداد مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ q دقیقاً برابر $q-1$ است.

مشاهده کردیم که دقیقاً دو مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۳ وجود دارد. همچنین سه مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۴ وجود دارند که آن‌ها را مشخص کردیم.

تأثیر عمل‌های روی مربع‌هـــای لاتین در مربع‌های لاتین متعامد

جایگشت نمادها روی مربع‌های لاتین تأثیری در متعامد بودن آن‌ها ندارد. یعنـــی اگر دو مربع لاتین هم‌مرتبه متعامد باشند، با انجام جایگشت نمادها روی هر کدام باز هم متعامدند.

فرض کنیم L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد باشـــند. اگر L_3 مربعی لاتینی باشـــد که از تعویض دو یـــا چند نماد با همان جایگشت نمادها از L_2 حاصل شـــده باشد، آن‌گاه L_1 با L_3 نیز متعامد است.

فرض کنید در L_2، دو نماد a و b را تعویض کنیم. اگر هر دو درایه متفاوت در L_1 را در نظر بگیریم که در L_1L_3 نیز متفاوت‌اند، حال اگر دو درایه یکسان مثلاً c را در L_1 در نظر بگیریم، در این صورت در ca و cb نیز متفاوت‌اند؛ زیرا این درایه‌ها همان cb و ca در L_2 هســـتند. به‌عبارت دیگر، اگر دو درایه در L_1L_3 مساوی شـــوند، در L_1L_2 نیز مساوی خواهند بود که متناقض با متعامد بودن L_1L_2 است.

به‌طور کلی، اگر اعمال یک جایگشت را روی تمام عضوهای یکـــی از دو مربع لاتین متعامد انجام دهیم، باز هم در متعامد بودن تأثیری ندارد.

یعنی اگر L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد هم‌مرتبه باشند و اعمال یک جایگشت را روی تمام عضوهای L_2 انجام دهیم و آن را L_3 بنامیـــم، آن‌گاه L_1 و L_3 نیز متعامدند. دلیل آن دقیقاً مانند قسمت قبلی است.

نتیجه: اگر L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n باشند و آن‌هـــا را به‌صورت اســـتاندارد L_1' و L_2' تبدیل کنیم در این صورت L_1' و L_2' نیز متعامد خواهند بود.

نتیجه: در همه مربع‌های لاتین متعامد می‌توانیم فرض کنیم سطر اول همه یکسان و عددها $1, 2, \ldots, n$ باشند.

دو مربع لاتین شـــکل۳۲ را در نظر می‌گیریم. آیا این دو مربع لاتین L_1 و L_2 متعامدند؟

شکل ۳۲

$L_1 =$

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

شکل ۳۲

$L_2 =$

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

در L_1 جایگشت ذیل را روی نمادهای عددی انجام می دهیم: به مربع لاتین L_1' می‌رسیم (شکل ۳۳). مشاهده می‌کنیم که L_1 به یک مربع لاتین کاهش یافته L_1' تبدیل شـــده است.

شکل ۳۳

$L_1' =$

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

شکل ۳۴

$L_2' =$

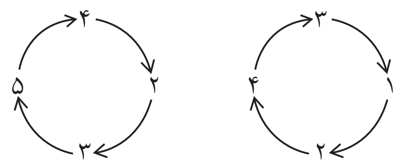
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

آیا L_1' و L_2 متعامدند؟

به همین ترتیب در L_2 جایگشت زیر را روی نمادهای عددی انجام می‌دهیم. به مربع لاتین L_1' می‌رسیم (شکل ۳۵).

آیا L_2' مربع لاتین چرخشی است؟

آیا L_1 و L_1' متعامدند؟



L_1' و L_2' را کنار هم قرار می‌دهیم. آیا L_1' و L_2' متعامدند؟

شکل ۳۵

شکل ۳۵

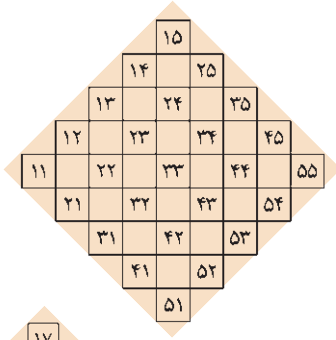
$S_{(L_1', L_2')} =$

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵
۲۵	۳۱	۴۲	۵۳	۱۴
۳۴	۴۵	۵۱	۱۲	۲۳
۴۳	۵۴	۱۵	۲۱	۳۲
۵۲	۱۳	۲۴	۳۵	۴۱

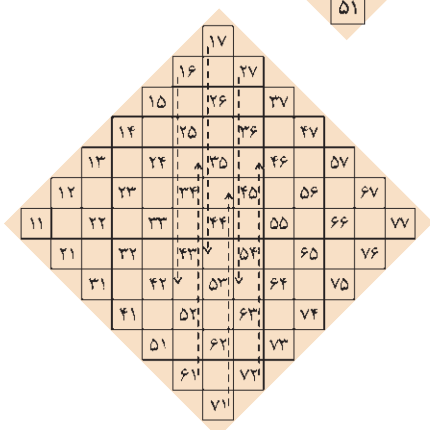
روشی دیگر در ساختن مربع‌های لاتین از مرتبهٔ فرد $(n\geq ۳)$

ابتدا یک مربع $n\times n$ می‌سازیم. یک ضلع مربع، مثلاً ضلع بالایی را انتخاب می‌کنیم. اولین و آخرین مربع‌هایی را که یک ضلع آن‌ها روی این ضلع $n\times n$ است، رها می‌کنیم. سپس از دو طرف، هر یک از مربع‌های دیگر را به ترتیب $۱, ۲, ۳, \ldots, \frac{n-۱}{۲}$ به بالا انتقال می‌دهیم (مربع وسطی فقط $\frac{n-۱}{۲}$ واحد به بالا انتقال می‌یابد).

این عمل را برای سه ضلع دیگر به‌طور مشابه انجام می‌دهیم. سپس مطابق نمونه عددهای $(۱۱, ۱۲, ۱۳, \ldots, ۱n)$ و $(۲۱, ۲۲, \ldots, ۲n)$ و... $(n۱, n۲, \ldots, nn)$ را در خانه‌ها قرار می‌دهیم. اکنون عدد هر خانه را به اندازهٔ n واحد به درون انتقال می‌دهیم تا در خانه‌های خالی واقع شوند. آیا می‌توانید دلیلی برای آن بیان کنید؟ اکنون با جدا کردن عددها دو مربع لاتین متعامد را در شکل ۳۶ مشاهده می‌کنید.



به همین ترتیب ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷



را مشاهده می‌کنید.

مثال: فرض کنیم بخواهیم کیفیت پنج نوع لاستیک را که آن‌ها را با نمادهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نام‌گذاری کرده‌ایم، توسط پنج اتومبیل A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 که هم مدل و دارای تاریخ ساخت یکسان هستند، به‌طور هم‌زمان در یک مسافت معین و در پنج روز از هفته آزمایش کنیم. طرحی ارائه دهید که طبق آن هر لاستیک توسط هر پنج اتومبیل و هر کدام در یک روز مشخص آزمایش شوند.

شکل ۳۷

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	۱	۲	۳	۴	۵
A_2	۲	۳	۴	۵	۱
A_3	۳	۴	۵	۱	۲
A_4	۴	۵	۱	۲	۳
A_5	۵	۱	۲	۳	۴

اگر این پنـــج روز را D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 بنامیم، آن‌گاه یک طرح آزمایش می‌تواند طبق جدول شکل ۳۷ باشد.

مثلاً توســط اتومبیل A_2، هر پنج لاســتیک در پنج روز متفاوت آزمایش می‌شوند. هر روز توسط هر پنج اتومبیل هر پنج نوع لاستیک آزمایش می‌شوند. بنابراین هیچ نوع لاستیکی در یک روز توسط دو اتومبیل آزمایش نمی‌شود. یعنی در هیچ ستون این جدول عدد تکراری وجود ندارد. همچنین توسط هر اتومبیل

شکل ۳۸

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	۱	۲	۳	۴	۵
A_2	۵	۱	۲	۳	۴
A_3	۴	۵	۱	۲	۳
A_4	۳	۴	۵	۱	۲
A_5	۲	۳	۴	۵	۱

در پنج روز هر پنج نوع لاستیک آزمایش می‌شود. یعنی توسط هر اتومبیل در هیچ دو روزی یک نوع لاستیک آزمایش نمی‌شود. بنابراین در هیچ سطر این جدول نیز عدد تکراری نداریم. در واقع این جدول یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ است.

جدول شکل ۳۸ نیز یک طرح دیگر برای همین آزمایش می‌تواند باشـــد. هر دو جدول تمـــام ویژگی‌های فوق را دارند. فقط تفاوت در این است که امکان دارد. آزمایش یک لاستیک از نظر نوع اتومبیل در روز دیگری انجام شـــده باشـــد و همان روزی نباشد که در جدول شکل ۳۷ مشخص شده است.

واضح است که جدول‌های زیادی می‌توان برای این آزمایش طرح کرد. اکنون فرض کنیم بخواهیم به‌طور همزمان مقاومت پنج نوع روغن ترمز را نیز توسط همین پنج اتومبیل در همین پنج روز بررســـی کنیم. این روغن ترمزها را با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. شکل ۳۹، می‌تواند یک طرح این آزمایش باشد.

شکل ۳۹

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	۱	۲	۳	۴	۵
A_2	۳	۴	۵	۱	۲
A_3	۵	۱	۲	۳	۴
A_4	۲	۳	۴	۵	۱
A_5	۴	۵	۱	۲	۳

شکل ۴۰

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	(۱،۱)	(۲،۲)	(۳،۳)	(۴،۴)	(۵،۵)
A_2	(۲ ،۳)	(۳ ،۴)	(۵ ،۴)	(۵ ،۱)	(۱ ،۲)
A_3	(۳ ،۵)	(۴ ،۱)	(۵ ،۲)	(۱ ،۳)	(۲ ،۴)
A_4	(۳ ،۲)	(۵ ،۳)	(۱ ،۴)	(۲ ،۵)	(۳ ،۱)
A_5	(۵ ،۴)	(۱ ،۵)	(۲ ،۱)	(۳ ،۲)	(۴ ،۳)

اگر می‌خواســـتیم روغن ترمزها را به‌طور جداگانه مستقل از لاستیک‌ها آزمایش کنیم، مانند فوق می‌توانیم جدول‌های

توسعهٔ منظم مربع‌های لاتین به‌وسیلهٔ اویلر در سال ۱۷۷۹ شروع شد و توسط کیلی (۱۸۹۰ ـ ۱۸۷۷) در مورد جدول عمل روی گروه‌ها به‌کار برده شد. چون اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شدند

زیادی را طرح کنیم، یا به عبارت دیگر، مربع‌های لاتین زیادی را مشخص کنیم. در شکل ۳۹ تعدادی از این طرح‌ها را در یک مربع لاتین مشاهده می‌کنید.

امـــا اگر بخواهیم این دو آزمایش همزمان توســـط همین پنج اتومبیل انجام شـــوند، به جدولی مانند جدول شکل ۴۰ نیـــاز داریم که از ادغام مثلاً جدول‌های شـــکل‌های ۳۷ و ۳۹ به‌دست آمده است.

در این جدول هیچ دو زوج مرتب یکسان وجود ندارند. به این معنی که مثلاً لاستیک شمارهٔ ۲ و روغن شمارهٔ ۴ فقط توسط یک نوع اتومبیل و فقط در یک روز مشخص آزمایش شده‌اند.

در روز چهارم اتومبیل A_4، لاســـتیک شـــمارهٔ ۲ و روغن ترمز شمارهٔ ۵ را آزمایش می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. latin Squares
2.Quasi groups
3.Fisher
4. Combinatorial Designs
5. Reduced Latin Square
6.Column Permutation
7.Row Permutation
8.Relabeling
9.Isotopic
10. Orthogonal Latin Squares
11. Greacolatin
12. Tarry
13. Bose, Parker and Shrikhande
14. Superimposing
15. Mutually Orthogonal latin Squares

منابع

1. Introduction to combinatorial Designs W.D.WALLIS champan Hall/CRC 2007
2. Combinatorial Designs: constructions and Analysis Dougllas R.Stinson Springer 2004
3.LATIN SQUARES and their Applicatios Donald Keedwell and jazsef Denes ELSEVIER 2015